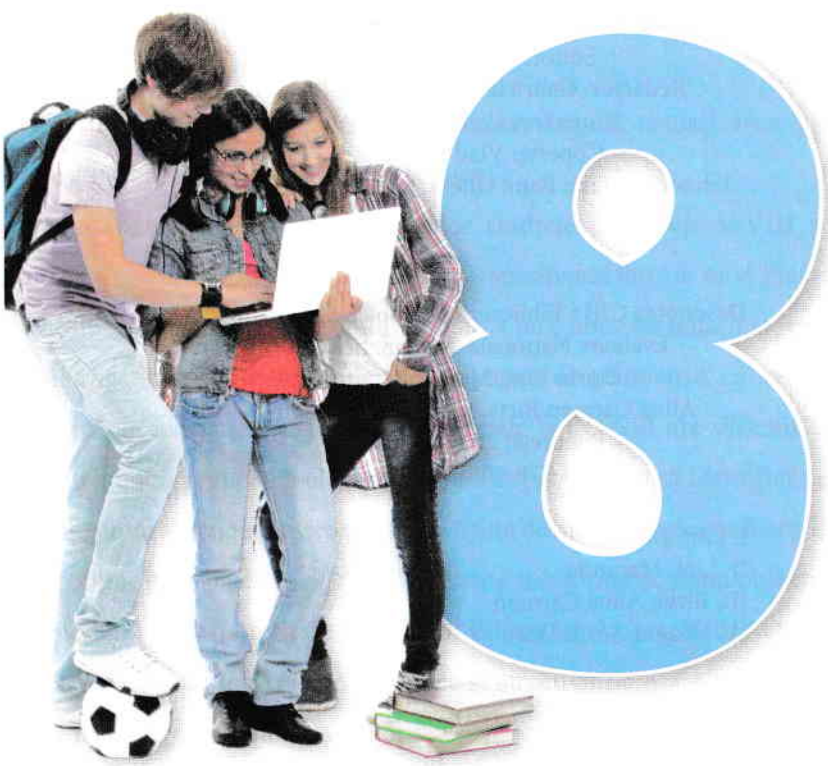
Dorin Linț Maranda Linț Alina Carmen Birta Sorin Doru Noaghi

Evaluare Națională

Matematică



LITERA

CUPRINS

PARTEA I. SINTEZA CONȚINUTURILOR TEORETICE STUDIATE ÎN CLASELE V-VIII

PARTEA A II-A. RECAPITULAREA ȘI SISTEMATIZAREA CUNOȘTINȚELOR, PRIN ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PARTEA A III-A. TESTE DE EVALUARE/AUTOEVALUARE

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

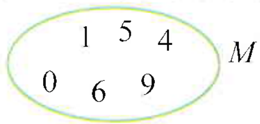
Partea I

Sinteza conținuturilor teoretice studiate în clasele V-VIII

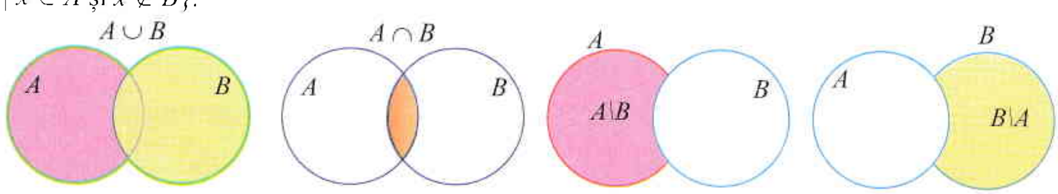
I. MULȚIMI. NUMERE

1.1. Mulțimi

- O ***mulțime*** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte (elementele mulțimii), considerată ca entitate.
- Dacă A este o mulțime și x este un element al său, vom spune că x ***aparține*** mulțimii A și vom scrie $x \in A$. Dacă x nu este element al mulțimii A, vom scrie $x \notin A$.
- O mulțime poate fi definită (descrisă, dată, scrisă) astfel:
  1) enumerând elementele mulțimii $M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$
  2) prin diagrame Venn–Euler

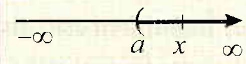
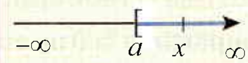
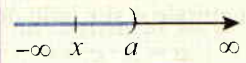
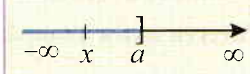


  3) enunțând o proprietate comună a elementelor mulțimii $M = \{x | x$ poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect$\}$
- Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul $\varnothing$ și se numește ***mulțimea vidă***.
- O mulțime care are un număr finit de elemente, se numește ***mulțime finită***, iar numărul elementelor sale se numește ***cardinalul mulțimii***.
- O ***mulțime numerică*** este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.
- Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc ***mulțimi egale***.
  Dacă mulțimile A și B *sunt egale*, scriem $A = B$. Dacă mulțimile A și B *nu sunt egale*, scriem $A \neq B$.
- Mulțimea A ***este inclusă*** în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B.
  Dacă mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B, scriem $A \subset B$.
  Dacă mulțimea A ***nu este inclusă*** în mulțimea B, scriem $A \not\subset B$.
- Dacă $A \subset B$, atunci mulțimea A se numește ***submulțime*** a mulțimii B, sau ***parte*** a mulțimii B.
  Mulțimea vidă, notată $\varnothing$, este submulțime a oricărei mulțimi, adică: $\varnothing \subset A$ oricare ar fi mulțimea A.
- ***Reuniunea*** mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre ele:
  $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$.
- ***Intersecția*** mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi:
  $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$.
- Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc mulțimi ***disjuncte***.
- ***Diferența*** mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B:
  $A - B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$.



- **Mulțimi de numere**
  - Mulțimea numerelor *naturale*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
  - Mulțimea numerelor *întregi*: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
  - Mulțimea numerelor *raționale*: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
  - Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale este *mulțimea numerelor reale*, notată cu $\mathbb{R}$.
  - Notația $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este utilizată pentru mulțimea numerelor iraționale.

- Pentru a și b numere reale cu $a < b$, se definesc următoarele mulțimi de numere, numite ***intervale***.

INTERVALE MĂRGINITE		**INTERVALE NEMĂRGINITE**	
Intervalul	**Reprezentarea geometrică**	**Intervalul**	**Reprezentarea geometrică**
interval deschis $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x < b\}$		***interval deschis nemărginit la dreapta*** $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x > a\}$	
interval închis $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x \le b\}$		***interval închis la stânga, nemărginit la dreapta*** $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \ge a\}$	
interval semideschis $(a, b]$ $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a < x \le b$		***interval deschis, nemărginit la stânga*** $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x < a\}$	
interval semideschis $[a, b)$ $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $a \le x < b\}$		***interval închis la dreapta, nemărginit la stânga*** $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ și $x \le a\}$	
Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a)$ sau $x \in (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ și $\lvert x \rvert \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a]$ sau $x \in [a, \infty)$	

- Pentru două intervale I_1 și I_2 avem: $I_1 \cup I_2 = \{x \mid x \in I_1$ sau $x \in I_2\}$ $\quad I_1 \cap I_2 = \{x \mid x \in I_1$ și $x \in I_2\}$

1.2. Mulțimea numerelor naturale

- Șirul numerelor naturale: 0, 1, 2, 3, ... , n, $n + 1$, ... este infinit (nu există un cel mai mare număr natural).
- Doi termeni care urmează unul după altul: $\boldsymbol{n}$ și $\boldsymbol{n+1}$ se numesc ***numere consecutive.***
  Numerele consecutive pot fi scrise atât crescător (n; $n + 1$; $n + 2$; ...), cât și descrescător (m; $m - 1$; $m - 2$; ...).
  Fiind date numerele n și $n + 1$, n se numește ***predecesorul*** lui $n + 1$, iar $n + 1$ se numește ***succesorul*** lui n.
- ***Axa numerelor*** este o dreaptă pe care fixăm un punct O, numit ***origine***, alegem un segment, numit ***unitate de măsură*** și stabilim un ***sens de parcurgere a dreptei***, de regulă, de la stânga spre dreapta.
  Oricărui punct de pe axă îi corespunde un singur număr, numit ***coordonata*** punctului.
  Punctului O îi corespunde numărul 0.
- ***Aproximarea prin lipsă*** la zeci (sute, mii etc.) a unui număr natural este cel mai mare număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.), mai mic decât numărul dat.
  Aproximarea prin adaos la zeci (sute, mii etc.) a unui număr natural este cel mai mic număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.), mai mare decât numărul dat.
  Estimarea este o evaluare a unei cantități, având date incomplete sau insuficiente. Spre deosebire de aproximare, la care cunoaștem mărimea maximă a erorii, în cazul estimării nu avem această posibilitate.
- **Adunarea** $\underbrace{a + b}_{\text{termeni}} = \underbrace{c}_{\text{sumă}}$ **Scăderea** $\underbrace{a - b}_{\text{termeni}} = \underbrace{c}_{\text{diferență}}$

Proprietăți:

a) Adunarea este comutativă: $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b.

b) Adunarea este asociativă: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c.

c) Zero (0) este element neutru în raport cu adunarea: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul natural a.

Au loc proprietățile: $a - 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a; $a - b - c = a - (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c.

■ **Înmulțirea** $\underbrace{a \cdot b}_{\text{factori}} = \underbrace{c}_{\text{produs}}$

Proprietăți:

a) Înmulțirea este comutativă: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a și b.

b) Înmulțirea este asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c.

c) Înmulțirea este distributivă față de adunare sau scădere:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\quad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c.

d) Unu (1) este element neutru în raport cu înmulțirea: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, oricare ar fi numărul natural a.

■ **Împărțirea** la 0 nu este posibilă.

Pentru numerele naturale a și b, b nenul, există numerele naturale c și r unic determinate, astfel încât:

$a = b \cdot c + r$ $\quad$ și $\quad 0 \le r < b$.

deîmpărțit ← $a = b \cdot c + r$ → rest; împărțitor, cât

Numărul c este *câtul* și numărul r este restul împărțirii lui a la b.

■ **Puterea a *n*-a** a numărului natural a este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$, a și n numere naturale, $n \ne 0$ și $n \ne 1$.

a se numește *baza* puterii, iar n se numește *exponentul* puterii.

Prin convenție: $a^1 = a$; $a^0 = 1$, pentru orice $a \ne 0$; $\quad 0^n = 0$, oricare ar fi $n \ne 0$; $\quad 0^0$ nu are sens.

Dacă a este un număr natural, a^2 se numește *pătratul* numărului a, iar a^3 se numește *cubul* numărului a.

■ **Operații cu puteri**

Oricare ar fi numerele naturale a, m, n, $a \ne 0$ avem:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ dacă } m \ge n.$$

Oricare ar fi numerele naturale a, b, n, $a \ne 0$, $b \ne 0$ avem: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(a : b)^n = a^n : b^n$.

■ **Compararea puterilor**

Pentru numerele naturale nenule a, m, n, cu $a \ge 2$, are loc: $a^m \le a^n$ dacă și numai dacă $m \le n$.

Pentru numerele naturale nenule a, b, n, are loc: $a^n \le b^n$ dacă și numai dacă $a \le b$.

■ **Scrierea numerelor naturale în baza 10**

În mod uzual, folosim scrierea numerelor naturale în baza 10 (în sistemul zecimal de numerație).

Orice număr natural se poate scrie ca sumă de produse în care un factor este de forma 10^n, cu n număr natural, iar celălalt factor este unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Exemplu: Numărul natural $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$ se notează $\overline{abcd}_{(10)}$ sau $\overline{abcd}$

■ **Scrierea numerelor naturale în baza 2**

Orice număr natural se poate scrie ca sumă de produse în care un factor este de forma 2^n, cu n număr natural, iar celălalt factor este 0 sau 1.

Exemplu: numărul $m = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$, unde unde $a, b, c, d \in \{0; 1\}$ reprezintă descompunerea în baza 2 a numărului m și scriem $m = \overline{abcd}_{(2)}$.

Un număr scris în baza 10 se poate scrie în baza 2, și invers, un număr scris în baza 2 se poate scrie în baza 10.

Egalitatea $\overline{abcd}_{(2)} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$ permite trecerea aceluiași număr natural din baza 2 în baza 10 și invers.

Exemplu: a) $110_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6_{(10)}$.

b) $6 = 6_{(10)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110_{(2)}$

Pentru a găsi cifrele numărului, în baza 2, trebuie să-l descompunem după puterile lui 2, cu factorii 0 sau 1. În acest scop, efectuăm împărțiri succesive la 2 și identificăm cifrele care reprezintă resturile obținute.

Exemplu:

$21 = 2 \cdot 10 + 1$ $\quad 10 = 2 \cdot 5 + 0$ $\quad 5 = 2 \cdot 2 + 1$ $\quad 2 = 2 \cdot 1 + 0$ $\quad 1 = 2 \cdot 0 + 1$

Scriem resturile, în ordinea inversă găsirii și obținem numărul în baza 2.

$21_{(10)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10101_{(2)}$

1.3. Divizibilitate

- Fie a și b două numere naturale.
  Spunem că a este divizibil cu b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.
  Notăm $a \,\vdots\, b$ și citim „a este divizibil cu b" sau notăm $b \mid a$ și citim „b divide a".
  Spunem că b este un ***divizor*** al lui a sau că a este un ***multiplu*** al lui b.

  Dacă avem $a \neq b \cdot c$, pentru orice număr natural c, atunci spunem că „a nu este divizibil cu b" sau că „b nu divide a". Sau putem spune că „a nu este un multiplu al lui b" și că „b nu este un divizor al lui a".
  Notăm: $a \not\vdots\, b$, respectiv, $b \nmid a$.
- Dacă $a = b \cdot c$, atunci b și c sunt divizori ai lui a, iar a este multiplu al lui b, dar și al lui c.
- Pentru orice număr natural a avem:
  - $1 \mid a$ — 1 este divizorul oricărui număr natural.
  - $a \mid a$ — Orice număr natural are ca divizor pe numărul însuși.
- Pentru orice număr natural $a \neq 0$ avem:
  - $a \mid 0$ — 0 este multiplul oricărui număr natural.
  - $a \mid a$ — Orice număr natural este divizor al lui însuși.
- Orice multiplu al unui număr natural a are forma $n \cdot a$, cu n număr natural.
- **Criterii de divizibilitate**
  - Un număr natural este **divizibil cu 2** dacă ultima sa cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8.
    Dacă ultima cifră a unui număr natural este 1, 3, 5, 7 sau 9, atunci numărul nu este divizibil cu 2.
  - Un număr natural este **divizibil cu 5** dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
    Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este nici 0, nici 5, atunci numărul nu este divizibil cu 5.
  - Un număr natural este **divizibil cu 10** dacă ultima sa cifră este 0.
    Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0, atunci numărul nu este divizibil cu 10.
  - Un număr natural este **divizibil cu 10^n** dacă ultimele sale n cifre sunt zerouri.
  - Un număr natural este **divizibil cu 3** dacă suma cifrelor sale se divide cu 3.
  - Un număr natural este **divizibil cu 9** dacă suma cifrelor sale se divide cu 9.
- Numim ***divizori proprii*** ai unui număr natural n toți divizorii diferiți de 1 și de n.
  Divizorii 1 și n se numesc ***divizori improprii*** ai lui n.
- Numărul natural n mai mare decât 1 este ***număr prim*** dacă are doar divizori improprii.
  Dacă n are cel puțin un divizor propriu, atunci este ***număr compus***.
- **Cel mai mare divizor comun** al numerelor naturale a și b (prescurtat c.m.m.d.c.), notat cu (a, b) se află astfel:
  - se descompun numerele în factori primi;
  - se iau toți factorii primi comuni, o singură dată, la puterea cea mai mică, și se înmulțesc între ei.
- **Cel mai mic multiplu comun** al numerelor naturale a și b (prescurtat c.m.m.m.c.), notat cu $[a, b]$ se află astfel:
  - se descompun numerele în factori primi;
  - se iau toți factorii primi, comuni și necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare, și se înmulțesc între ei.
- **Proprietăți ale divizibilității** în $\mathbb{N}$:

  $a \mid a$, unde $a \in \mathbb{N}$; $\qquad a \mid b$ și $b \mid c \Rightarrow a \mid c$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$;

  $a \mid b$ și $a \mid c \Rightarrow a \mid (b \pm c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$; $\qquad a \mid bc$ și $(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$.

1.4. Mulțimea numerelor întregi

- Șirul numerelor întregi: ... $-(n+1)$, $-n$, $-(n-1)$, ..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$ este infinit (nu există un cel mai mic, nici un cel mai mare număr întreg).

  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

  $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – mulțimea numerelor întregi pozitive

  $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ – mulțimea numerelor întregi negative

  $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$

- **Opusul numărului întreg** x este numărul întreg notat $-x$, care are ca reprezentare pe axa numerelor simetricul față de origine al punctului care-l reprezintă pe x.
- **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr întreg x este distanța de la originea axei de coordonate la punctul de reprezentare pe axă, a numărului x.

Operații cu numere întregi

- **Adunarea** numerelor întregi se efectuează ținând cont de următoarele reguli:
  a) Dacă termenii au același semn, atunci suma lor are semnul comun, iar modulul sumei este egal cu suma modulelor termenilor.
  b) Dacă termenii au semne diferite, atunci suma lor are semnul termenului care are modulul mai mare, iar modulul sumei este diferența modulelor.

  Adunarea numerelor întregi păstrează proprietățile adunării numerelor naturale, la care se adaugă:

  Fiecare număr întreg admite un opus, număr întreg: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

- **Diferența** numerelor întregi a și b este suma dintre numărul a și opusul numărului b.

  $a - b = a + (-b)$

- **Înmulțirea**

  Produsul a două numere întregi nenule este un număr întreg care este egal cu:
  - produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul +, dacă cele două numere întregi au același semn;
  - produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul –, dacă cele două numere întregi au semne diferite;
  - produsul oricărui număr întreg cu 0 și produsul lui 0 cu orice număr întreg este egal cu 0.

  Înmulțirea numerelor întregi păstrează proprietățile înmulțirii numerelor naturale.

- **Împărțirea**

  Dacă a și b sunt numere întregi, iar a este multiplu al lui b, $b \neq 0$, atunci rezultatul împărțirii $a : b$ este tot număr întreg, care este egal cu:
  - câtul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul +, dacă cele două numere au același semn;
  - câtul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul –, dacă cele două numere au semne diferite.

  Are loc proprietatea:

  $a : 1 = a$, oricare ar fi numărul natural a

- **Puterea unui număr întreg**

  Fie a un număr întreg și n un număr natural nenul.
  Dacă $a \geq 0$, atunci a^n este număr natural.
  Dacă $a < 0$, atunci avem următoarele cazuri:

  a) n par $\Rightarrow a^n \in Z_+$ b) n impar $\Rightarrow a^n \in Z_-$

a) Fracții ordinare

Fiind date numerele naturale a și b, $b \neq 0$, scrierea $\frac{a}{b}$ se numește *fracție ordinară*.

a se numește *numărătorul* fracției, iar b se numește *numitorul* fracției.

Fracțiile care au numărătorul egal cu numitorul se numesc **fracții echiunitare**. Ele reprezintă un întreg.

Fracțiile care au numărătorul mai mic decât numitorul se numesc **fracții subunitare**. Ele reprezintă mai puțin decât un întreg.

Fracțiile care au numărătorul mai mare decât numitorul se numesc **fracții supraunitare**. Ele reprezintă mai mult decât un întreg.

Fracții echivalente

Două fracții, $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, sunt echivalente și scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Procente

Fracția $\frac{1}{100}$ se numește ***procent***.

Scrierea procentelor se face în felul următor: $\frac{1}{100} = 1\%$; $\frac{p}{100} = p\%$.

Scoaterea întregilor din fracție

Pentru a scoate întregii din fracția $\frac{a}{b}$ cu b diferit de 0, scriem teorema împărțirii cu rest pentru numerele a și b. Câtul reprezintă numărul întregilor, iar restul reprezintă numărul părților fracționare rămase. Vom scrie:

$$a = b \cdot c + r \Leftrightarrow \frac{a}{b} = c\frac{r}{b}$$

Introducerea întregilor în fracție

Pentru numerele naturale a, b, c, cu c diferit de 0, transformarea $a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$ se numește *introducerea întregilor în fracție*.

Compararea fracțiilor

Fie a, b, c numere naturale. Atunci:

Dintre două fracții cu același numitor, este mai mare fracția care are *numărătorul mai mare*:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{b} \Leftrightarrow a > c,\ b \neq 0.$$

Dintre două fracții cu același numărător, este mai mare fracția care are *numitorul mai mic*:

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \Leftrightarrow b < c \quad b \neq 0, c \neq 0.$$

Amplificarea și simplificarea fracțiilor

A *amplifica* o fracție cu un număr natural diferit de zero înseamnă a înmulți atât numărătorul, cât și numitorul cu acel număr.

Prin amplificarea unei fracții se obține o fracție echivalentă cu cea dată: $^{m)}\frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{m \cdot b}$, unde $b \neq 0, m \neq 0$.

A *simplifica* o fracție cu un număr natural diferit de zero înseamnă a împărți atât numărătorul, cât și numitorul la acel număr.

Prin simplificarea unei fracții se obține o fracție echivalentă cu cea dată: $\frac{a}{b}^{(m} = \frac{a : m}{b : m}$, unde $b \neq 0, m \neq 0$.

Observație: Putem amplifica o fracție cu orice număr, dar nu putem simplifica decât cu un divizor comun al numărătorului și numitorului.

Fracții ireductibile

Dacă numărătorul și numitorul unei fracții nu au divizori comuni diferiți de 1, fracția se numește *ireductibilă*.

Observație: Cea mai scurtă cale de a ajunge la forma ireductibilă a unei fracții este simplificarea cu cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.

Aducerea fracțiilor la același numitor

Fiind date două fracții, $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, pentru a le aduce la același numitor procedăm astfel:

a) Aflăm numărul natural m, cel mai mic multiplu comun al numitorilor.

b) Amplificăm fracțiile astfel: ${}^{n_1)}\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n_1}{m}$, unde $n_1=m:b$, ${}^{n_2)}\frac{c}{d}=\frac{c\cdot n_2}{m}$, unde $n_2=m:d$

Observații:

1. Dacă numitorii sunt numere prime între ele, atunci fiecare fracție se amplifică cu numitorul celeilalte.
2. În unele cazuri este mai simplu să aducem la același numitor prin simplificarea fracțiilor.

Exemplu: $\frac{65}{39}$ și $\frac{170}{51}$. Avem $\frac{65}{39}^{(13}=\frac{5}{3}$, iar $\frac{170}{51}^{(17}=\frac{10}{3}$.

Operații cu fracții

a) Adunarea și scăderea fracțiilor

Pentru a efectua adunarea sau scăderea a două fracții procedăm astfel:

– Aducem fracțiile la același numitor (de regulă, cel mai mic multiplu comun al numitorilor).

– Adunăm, respectiv scădem numărătorii, numitorul rămânând același.

b) Înmulțirea fracțiilor

Pentru a înmulți o fracție cu o altă fracție, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.

Pentru cazul particular în care una dintre fracții are numitorul 1, deci este un număr natural, scriem: $\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}$

c) Împărțirea fracțiilor

Dacă a și b sunt numere naturale nenule, atunci fracția $\frac{b}{a}$ este inversa fracției $\frac{a}{b}$, iar fracția $\frac{a}{b}$ este inversa fracției $\frac{b}{a}$.

Câtul a două fracții este produsul dintre prima fracție și inversa celei de-a doua. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Produsul dintre o fracție și inversa ei este egal cu 1. $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$.

Proprietăți: $\frac{a}{b}:1=\frac{a}{b}$ $\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}:\frac{e}{f}=\frac{a}{b}:\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

d) Ridicarea la putere a unei fracții

Pentru a ridica o fracție la o putere, ridicăm atât numărătorul, cât și numitorul la puterea respectivă. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
Au loc aceleași reguli de calcul ca la numere naturale:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} \qquad \left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n=\frac{a^{m\cdot n}}{b^{m\cdot n}}$$

Aflarea unei fracții dintr-un număr sau dintr-o fracție

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural se înmulțește fracția cu acel număr. $\frac{a}{b}$ din n reprezintă $\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a\cdot n}{b}$

Pentru a afla o fracție dintr-o fracție, se înmulțesc cele două fracții. $\frac{a}{b}$ din $\frac{c}{d}$ reprezintă $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

b) Fracții zecimale

Orice fracție ordinară cu numitorul putere cu exponent natural a lui 10 se poate scrie sub formă de fracție zecimală. Numărul zecimalelor este egal cu exponentul puterii de la numitorul fracției.

Exemple: $\frac{1}{10}=0,1$; $\frac{1}{100}=0,01$; $\frac{12}{10}=1,2$

O fracție zecimală este formată din două părți, despărțite prin virgulă:
a) partea întreagă – aceasta este formată din numărul aflat în stânga virgulei;
b) partea zecimală – formată din cifrele situate în dreapta virgulei, numite *zecimale*.

Exemplu:

$$\underbrace{12}_{\text{partea întreagă}},\underbrace{3205}_{\text{partea zecimală}}$$

■ Transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară

Orice fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule se poate scrie sub formă de fracție ordinară astfel:
a) la numărătorul fracției scriem numărul obținut eliminând virgula;
b) la numitor scriem puterea a n-a a lui 10, unde n este numărul zecimalelor semnificative.

■ Rotunjirea fracțiilor zecimale

Rotunjirea unei fracții zecimale este o aproximare.

Dacă cifra situată în dreapta ordinului la care se face aproximarea este mai mică decât 5, atunci se face aproximare *prin lipsă*, neglijându-se acea cifră.

Dacă cifra situată în dreapta ordinului la care se face aproximarea este cel puțin egală cu 5, atunci se face aproximare *prin adaos*, mărind cu o unitate cifra corespunzătoare ordinului la care se face aproximarea.

■ Compararea fracțiilor zecimale

Pentru compararea a două fracții zecimale se procedează astfel:
– se compară părțile întregi ale celor două fracții.
– dacă cele două părți întregi sunt diferite, atunci va fi mai mare fracția zecimală care are partea întreagă mai mare. În acest caz, zecimalele nu au niciun rol în compararea celor două fracții.
– dacă părțile întregi sunt egale, vom compara zecimalele de același ordin, începând de la stânga către dreapta. Va fi mai mare fracția zecimală care are prima cifră de același ordin mai mare.

Operații cu fracții zecimale

a) Adunarea și scăderea

La efectuarea unei adunări sau a unei scăderi a două fracții zecimale, vom așeza numerele unul sub celălalt astfel încât să fie respectat ordinul fiecărei cifre.

b) Înmulțirea

Pentru a înmulți două fracții zecimale, înmulțim numerele ignorând virgula (ca și când ar fi numere naturale), iar la rezultat punem virgula, de la dreapta spre stânga, peste atâtea cifre câte zecimale au împreună cele două numere.

Produsul unei fracții zecimale cu 10, 10^2, 10^3, … se obține mutând virgula, de la stânga spre dreapta, peste atâtea cifre cât este puterea lui 10. Dacă nu avem suficiente cifre, adăugăm zerouri.

c) Împărțirea

■ Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală

Sunt situații în care împărțirea a două numere naturale nu este număr natural. Aceasta se întâmplă atunci când împărțitorul nu este divizor al deîmpărțitului. În aceste situații punem virgulă la rezultat, adăugăm câte un zero la deîmpărțit și continuăm împărțirea până când restul este zero.

Exemplu 17 : 5 = 3,4

Dacă la împărțire obținem restul zero la un moment dat, atunci fracția zecimală obținută se numește *fracție zecimală finită*. Dacă un grup de zecimale se repetă, în aceeași ordine, la nesfârșit, se obține o fracție zecimală infinită, periodică.

Exemple: 35 : 3 = 11,6666... = 11,(6); 53 : 6 = 8,83333... = 8,8(3).

Observăm, în ambele situații, că împărțirea nu se termină, oricât am continua.

Am obținut două *fracții zecimale periodice.*

Cifra/Grupul de cifre care se repetă formează *perioada* fracției zecimale și se scrie în paranteză.

a) Dacă perioada începe imediat după virgulă, atunci avem *o fracție zecimală periodică simplă.*

b) Dacă între virgulă și perioadă avem cel puțin o cifră, atunci avem *o fracție zecimală periodică mixtă.*

■ Împărțirea unei fracții zecimale finite la un număr natural

Pentru a împărți o fracție zecimală la un număr natural procedăm astfel:

a) împărțim partea întreagă la numărul natural dat și scriem virgula la cât;

b) continuăm împărțirea coborând celelalte cifre și continuăm împărțirea ca în cazul numerelor naturale. Dacă este nevoie, mai adăugăm zerouri.

La împărțirea unei fracții zecimale la 10^n, rezultatul se obține prin mutarea virgulei de la dreapta spre stânga peste n cifre.

■ Împărțirea a două fracții zecimale finite

Pentru a împărți două fracții zecimale finite procedăm astfel: înmulțim ambele fracții zecimale cu 10^n, unde n este numărul de zecimale ale împărțitorului, după care împărțim numerele obținute conform celor învățate la împărțirea unui număr zecimal la un număr natural.

A împărți o fracție zecimală la 0,1 este echivalent cu a înmulți acea fracție zecimală cu 10.

A împărți o fracție zecimală la 0,01 este echivalent cu a înmulți acea fracție zecimală cu 100.

A împărți o fracție zecimală la 0,001 este echivalent cu a înmulți acea fracție zecimală cu 1000.

■ Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

Pentru a transforma o fracție zecimală periodică simplă în fracție ordinară procedăm astfel:

a) la numărător scriem tot numărul, fără virgulă, din care scădem partea întreagă;

b) la numitor scriem numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

$$\overline{0,(a)}=\frac{a}{9};\ \overline{0,(ab)}=\frac{\overline{ab}}{99};\ \overline{0,(abc)}=\frac{\overline{abc}}{999};\ \overline{0,(abcd)}=\frac{\overline{abcd}}{9999}$$

$$\overline{n,(a)}=\frac{\overline{na}-n}{9};\ \overline{n,(ab)}=\frac{\overline{nab}-n}{99};\ \overline{n,(abc)}=\frac{\overline{nabc}-n}{999};\ \overline{n,(abcd)}=\frac{\overline{nabcd}-n}{9999}$$

Pentru a transforma o fracție zecimală periodică mixtă în fracție ordinară procedăm astfel:

a) la numărător scriem tot numărul, fără virgulă, din care scădem partea aflată înainte de perioadă;

b) la numitor scriem numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada, urmate de atâtea cifre 0 câte cifre sunt între virgulă și perioadă.

$$\overline{0,a(b)}=\frac{\overline{ab}-a}{90};\ \overline{0,ab(c)}=\frac{\overline{abc}-\overline{ab}}{900};\ \overline{0,a(bcd)}=\frac{\overline{abcd}-a}{9990};\ \overline{0,abc(d)}=\frac{\overline{abcd}-\overline{abc}}{9000}$$

$$\overline{n,a(b)}=\frac{\overline{nab}-\overline{na}}{90};\ \overline{n,ab(c)}=\frac{\overline{nabc}-\overline{nab}}{900};\ \overline{n,a(bcd)}=\frac{\overline{nabcd}-\overline{na}}{9990};\ \overline{n,abc(d)}=\frac{\overline{nabcd}-\overline{nabc}}{9000}$$

Număr rațional

Orice număr care poate fi scris sub forma $\frac{a}{b}$, unde a și b, $b \neq 0$, sunt două numere întregi se numește ***număr rațional***.

1) Orice număr rațional x are un *opus*, notat $-x$. Opusul lui $-x$ este x.

Avem: $x + (-x) = (-x) + x = 0$

2) Orice număr rațional nenul x are un invers, notat $\frac{1}{x}$.

Avem $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1$.

3) Oricare ar fi un număr rațional x, se definește modulul său astfel: $|x| = OP$, adică lungimea segmentului determinat de originea O a axei numerelor și punctul P, de abscisă x.

1.6. Mulțimea numerelor reale

- Dacă x este pătrat perfect, atunci numărul natural n cu proprietatea $x = n^2$ se numește *rădăcina pătrată a numărului* x sau *radicalul de ordin 2* al numărului x.

  Se notează $\sqrt{x} = n$.

  $\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, unde $x \in \mathbb{N}$ este pătrat perfect și $n \in \mathbb{N}$.

- Dacă x este pătratul unui număr rațional, atunci numărul rațional pozitiv a cu proprietatea $x = a^2$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului x sau *radicalul* numărului x. Vom scrie $\sqrt{x} = a$.

- Oricare ar fi numerele x și y, pătrate ale unor numere raționale, $y \neq 0$, avem:

  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ și $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

- Pentru orice număr rațional $x \geq 0$, există rădăcina pătrată $\sqrt{x}$.

- Pentru $a \geq 0$ avem $\sqrt{x} = a$ dacă și numai dacă $x = a^2$.

- $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$.

- Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim aproximări ale numerelor care intervin, atunci vom obține **o estimare** a rezultatului corect.

- Dacă $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $n \leq \sqrt{x} < n+1$.

- Dacă $x = \dfrac{y}{10^{2n}}$ cu $y, n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{y}}{10^n}$.

Definiție Se numește **număr irațional** orice număr care **nu este rațional**.

- Pentru $x \in \mathbb{Q}_+$ avem: $\sqrt{x}$ este număr irațional dacă și numai dacă x nu este pătrat perfect și nu poate fi scris ca raport de pătrate perfecte.
- Un număr este irațional dacă și numai dacă se scrie sub formă de fracție zecimală infinită și neperiodică.

- Dacă $q \in \mathbb{Q}^*$ și $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$, atunci $-\sqrt{x}$, $q + \sqrt{x}$, $q\sqrt{x}$ sunt numere iraționale.
- **Mulțimea numerelor reale** este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale și se notează cu $\mathbb{R}$.

  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

  Mulțimea numerelor iraționale este diferența $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

- Folosim notațiile:

  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Atunci, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$.
- Un număr real *nu poate fi* simultan rațional și irațional: $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

- **Scoaterea factorului a de sub radical:** $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, oricare ar fi $a \geq 0, b \geq 0$.

  Pentru orice $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$, are loc relația $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

- **Introducerea factorului a sub radical:** $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, oricare ar fi $a \geq 0, b \geq 0$.

  Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a^k\sqrt{b} = \sqrt{a^{2k} \cdot b}$ și $a^k\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^{2k+1} \cdot b}$.